Dr. M. Bier (bier@is.mpg.de)
M.Sc. H. Bartsch

Physik der Flüssigkeiten I **WiSe 2017/18**

1. Übungsblatt (`http://www.is.mpg.de/dietrich/lehre/PdF`) **24. Oktober 2017**

1. *Wahrscheinlichkeit als Plausibilitätsmaß*

   Ein sehr allgemeiner Wahrscheinlichkeitsbegriff stellt die Interpretation als *Plausibilitätsmaß* $P(A|I)$ einer Aussage A auf Grund der vorliegenden Information I dar. Mit dieser Bedeutung wurde der Begriff der Wahrscheinlichkeit ursprünglich im 17. Jahrhundert eingeführt.

   Beispielsweise ergibt sich mit der Vorinformation

$$I := \text{“Es wird mit einem Würfel gewürfelt, dessen Seiten mit } 1, \ldots, 6 \text{ Augen markiert sind.”} \tag{1}$$

   und den Aussagen

$$A_n := \text{“Beim nächsten Wurf werden } n \text{ Augen gewürfelt.”} \tag{2}$$

   für die Wahrscheinlichkeit, ohne besondere Zusatzinformationen über den Würfel oder den Würfelprozess n Augen, $n \in \{1, \ldots, 6\}$, zu würfeln,

$$P(A_n|I) = \frac{1}{6}, \quad n \in \{1, \ldots, 6\}. \tag{3}$$

   (a) Bestimmen Sie $P(A_n|Z, I)$ für $n \in \{1, \ldots, 6\}$ für folgenden Fälle einer Zusatzinformation Z:

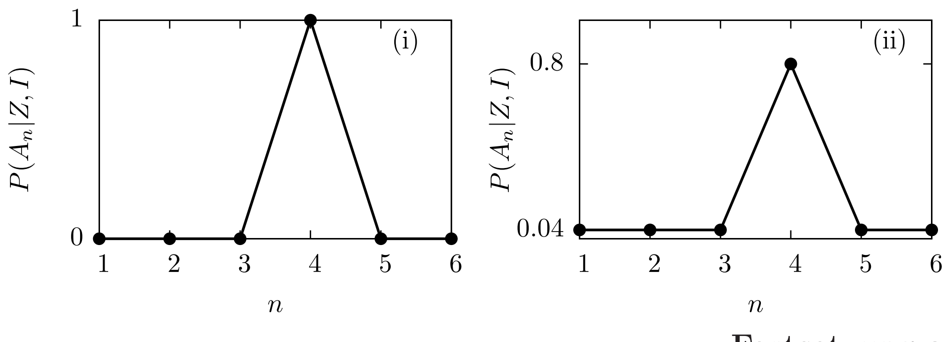
   i. $Z :=$ “Der Würfel ist so beschaffen, dass stets 2 Augen gewürfelt werden.”

   ii. $Z :=$ “Der Würfel ist so beschaffen, dass höchstens 3 Augen gewürfelt werden.”

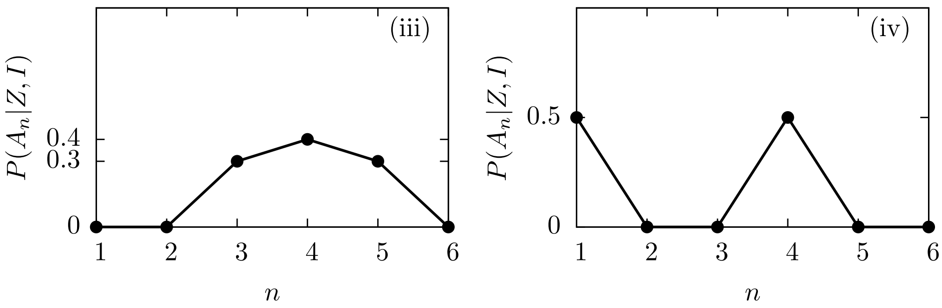
   iii. $Z :=$ “Der Würfel ist so beschaffen, dass 2 oder 3 Augen gewürfelt werden.”

   (b) Tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A_n|I)$ aus Gleichung (3) und $P(A_n|Z, I)$ aus Aufgabenteil (a) als Funktionen der Augenzahl $n \in \{1, \ldots, 6\}$ in ein gemeinsames Diagramm ein. Welche qualitative Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt die Gewissheit über den Ausgang des nächsten Würfelexperiments. Was ist die Ursache für mehr oder weniger große Gewissheit?

   (c) Formulieren Sie für die folgenden Fälle die Zusatzinformation Z in Worten:



Fortsetzung auf Seite 2



2. *Stetige Verteilungen*

Betrachten Sie eine reelle skalare Observable X, d.h. eine Funktion auf dem Phasenraum die einem Mikrozustand $\mathcal{C}$ eine reelle Zahl $X(\mathcal{C}) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

(Bemerkung: Hier wurde die Nomenklatur der statistischen Physik benutzt. In der Statistik spricht man statt von Observable, Phasenraum und Mikrozustand von stochastischer Variable, Stichprobenraum, bzw. Stichprobe.)

Die Verteilung P_X der Observablen X nennt man *stetig*, wenn es eine *Wahrscheinlichkeitsdichte* $p_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gibt, sodass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Observable X Werte im Intervall $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$ annimmt, gegeben ist durch

$$P_X([u,v]) = \int\limits_{[u,v]} \mathrm{d}x \; p_X(x).$$

(a) Bekannte Beispiele stetiger Verteilungen sind die *Gleichverteilung* auf dem Intervall $[a, b]$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p^{(1)}(x) = \begin{cases} N^{(1)} & , x \in [a,b] \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases} \quad , \tag{4}$$

die *Gauß-Verteilung* mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p^{(2)}(x) = N^{(2)} \exp\Big(- \frac{(x-m)^2}{2w^2} \Big) \tag{5}$$

und die *Lorentz-Verteilung* mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p^{(3)}(x) = \frac{N^{(3)}}{(x-m)^2 + w^2/4} \tag{6}$$

mit den Normierungskonstanten $N^{(k)} \in (0, \infty), k \in \{1, 2, 3\}$.
Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten $p^{(k)}(x), k \in \{1, 2, 3\}$, interpretieren Sie deren Parameter und bestimmen Sie die Normierungskonstanten so, dass $P_X^{(k)}(\mathbb{R}) = 1, k \in \{1, 2, 3\}$, gilt.

(b) Für eine Observable X mit stetiger Verteilung P_X definiert man den *Erwartungswert* durch

$$\langle X \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \; x p_X(x). \tag{7}$$

Daraus ergeben sich die *Varianz*

$$\mathrm{Var}(X) := \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \tag{8}$$

Fortsetzung auf Seite 3

und die *Standardabweichung*

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}. \tag{9}$$

Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für die Wahrscheinlichkeitsdichten $p^{(k)}, k \in \{1,2,3\}$, und interpretieren Sie diese Größen.

3. *Statistische Unabhängigkeit und Korrelation*

Betrachten Sie für zwei reelle skalare Observablen X und Y die reelle vektorielle Observable (X,Y) mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Komponenten X und Y der Observablen (X,Y) ebenfalls stetige Verteilungen besitzen und bestimmen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten $p_X : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ bzw. $p_Y : \mathbb{R} \to [0,\infty)$.

(b) Man nennt die Observablen X und Y *statistisch unabhängig*, falls gilt $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$. Finden Sie je ein Beispiel einer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{X,Y}$ zweier statistisch abhängiger und zweier statistisch unabhängiger Observablen X und Y.

(c) Man nennt die Observablen X und Y *unkorreliert*, falls die Korrelation

$$\begin{aligned}
\langle (X - \langle X\rangle)(Y - \langle Y\rangle)\rangle &= \langle XY\rangle - \langle X\rangle\langle Y\rangle && (10)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\; xy(p_{X,Y}(x,y) - p_X(x)p_Y(y)) && (11)
\end{aligned}$$

verschwindet. Finden Sie je ein Beispiel einer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{X,Y}$ zweier korrelierter und zweier unkorrelierter Observablen X und Y.

(d) Zeigen Sie, dass zwei *statistisch unabhängige* Observablen X und Y auch *stets unkorreliert* sind.

(e) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung der Aussage in Aufgabenteil (d) nicht gilt, d.h. dass zwei *unkorrelierte* Observablen X und Y *nicht notwendigerweise* auch *statistisch unabhängig* sind.